

爆破荷载应力波在无限弹性介质中传播的特征线法解

雷卫东¹, 李宏军², 柳纯¹

(1. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055; 2. 华蓝设计(集团)有限公司, 广西 南宁 530011)

摘要: 双指数爆破荷载的应力时程关系是爆破工程的数值分析常用的动力输入。其在弹性岩石中传播衰减的特征线法解是工程爆破数值分析中弹性以及弹塑性分析的重要参照, 也是动力学数值分析算法开发的重要高阶校准工具。应用统一弹性波的特征线法求解源自圆形孔洞的双指数爆破荷载在理想介质中的传播。介绍了源自圆形孔洞的双指数爆破荷载在周围弹性介质传播过程中的径向应力、周向应力、位移以及速度波的特征线法解的具体过程, 在 MATLAB 中进行了 4 种波的特征线法解的数值实施。对径向应力、周向应力、位移以及速度波的特征线法解的结果进行了多方面讨论。结果表明, 特征线法是求解双曲型偏微分方程的一种有效方法, 双指数爆破荷载在弹性岩石中传播衰减的特征线法解可为爆破工程数值分析以及动力学数值分析算法开发提供重要的支撑。

关键词: 爆破荷载; 特征线法; 无限弹性介质; 双曲型偏微分方程

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2016)10-2979-06

Solution of blasting-induced stress wave propagation in an infinite elastic medium based on characteristics method

LEI Wei-dong¹, LI Hong-jun², LIU Chun¹

(1. Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen, Guangdong 518055, China;

2. Hualan Design & Consulting Group, Nanning, Guangxi 530011, China)

Abstract: The stress wave expressed by the double exponential function is often used as the dynamic input in the numerical analysis for blasting engineering. A solution of stress wave propagation in elastic rock based on the characteristics method is an important benchmark for engineering numerical analyses, and for the validation of a dynamic numerical algorithm. The problem of blasting wave propagation in the surrounding infinite medium is solved using the given unified approach for elastic waves based on the characteristics method. The solution procedures for the radial and circumference stresses and the velocity and displacement waves during the compression blasting wave propagation are given, and these procedures are coded in MATLAB. The results of the radial and circumference stresses and the velocity and displacement waves are discussed. The characteristics method provides a powerful tool for solving the hyperbolic partial differential equations, and the solution of compression wave, expressed by the double exponential function, plays an important role in the analysis of the wave propagation problem.

Keywords: blasting wave; method of characteristics; infinite elastic medium; hyperbolic partial differential equation

1 引言

爆破荷载的应力时程关系的计算模型中, 公认的模型是双指数模型: $p(t) = p_0 f(t)$, 其中, p_0 为

峰值应力, $f(t)$ 为与时间 t 相关的双指数型时间滞后函数。 p_0 和 $f(t)$ 受炸药性能参数、炮孔半径、装药耦合状态、介质性能参数以及阻尼等影响。 p_0 和 $f(t)$ 最终确定还需要结合现场量测结果与理论计

收稿日期: 2016-06-23

基金项目: 深圳市科技计划项目(No. JCYJ20140417172417171)。

This work was supported by the Shenzhen Science and Technology Planning Program (JCYJ20140417172417171).

第一作者简介: 雷卫东, 男, 1966 年生, 博士, 副教授, 主要从事环境岩石动力学、边界元数值分析算法开发等方面的研究与教学工作。

E-mail: 562748177@qq.com

通讯作者: 李宏军, 男, 1988 年生, 硕士, 主要从事边界元数值分析算法的开发研究工作。E-mail: 614892520@qq.com

算对比,对相关参数逐步进行修正^[1]。双指数模型的应力时程曲线近似于应力峰值上升大大快于峰值应力下降的三角形,在一些情况下干脆近似地按照三角形的应力时间关系处理,即所谓的三角形波。双指数爆破荷载经常用于爆破工程的数值分析的输入,此类应用的文献非常多难以一一列举。除此以外,双指数爆破荷载在理想弹性介质中的衰减传播规律理应成为动力学数值分析算法开发校准时的动力输入。动力学数值分析算法按照相应的理论框架编制完成之后,需对所开发的算法在各种类型的动荷载下的数值分析解与相应的理论解进行比对,以验证所开发算法的正确性,以及发现问题后对所开发的算法进行调整。目前动力学数值分析算法开发校准中常用问题的解析解主要有:梁、杆以及圆形孔洞在突加荷载下或者谐波作用下的应力、位移或扭矩的解析解^[2-9]。就常用的动力学数值分析算法开发校准的荷载形式来说,突加荷载近似于冲击动荷载,异于工程中最常见的爆破荷载;而谐波在工程中几乎不存在。而非常接近于实际工程爆破荷载的双指数爆破荷载更适合应用于动力学数值分析算法的校准,但实际上反而很少见。对双指数爆破荷载在理想介质中的传播衰减规律研究在解析的意义上,可通过拉普拉斯变换把微分方程化为容易求解的代数方程来处理,从而使计算简化^[10]。

本文则是应用统一弹性波的特征线法求解源自圆形孔洞的双指数爆破荷载在理想介质中的传播,展示其应力、位移以及速度的特征线法解的具体过程。为动力学数值分析算法开发提供高阶校准工具;同时也为工程爆破数值分析的弹性以及弹塑性分析提供参照。

2 柱状弹性波波动方程特征线解

特征线法是求解双曲型偏微分方程的一种有效方法,适用于准线性偏微分方程的求解。沿着特征线,偏微分方程会大大简化,有时甚至可以化为常微分方程来求解。只要初始值不是沿着特征线给定,即可通过特征线法获得双曲型偏微分方程的精确解。其基本思想是通过把双曲线型准线性偏微分方程转化为两组常微分方程,再对常微分方程进行求解。两组常微分方程中的一组用于定义特征线,另一组用以描述沿给定的特征线变化。对于简单的偏微分方程,特征线法解可求出解析解或近似的解析解;对于复杂的偏微分方程,也可求得准确度很高的数值解。此外,双曲型偏微分方程的特征线有明显的物理意义,它可以加深理解偏微分方程所刻画

的物理现象,进而可以加深对偏微分本身的理解。

特征线法求解波动方程时,采用一系列的特征线,将计算区域划分网格,使得波动方程沿特征线易于数值求解。文献[11]给出了平面波、柱状波以及球形波等弹性波的统一特征线方程。对于柱状弹性波在无限域中的传播可视为平面应变波动问题。特征线法求解在以无限域内孔中心为极点的极坐标系中展开,由于问题的对称性,只需定义极径 r ,不需定义极角 θ 。

2.1 柱状弹性波波动方程

基本波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_r - \nu^* \sigma_\theta) \\ \frac{u}{r} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_\theta - \nu^* \sigma_r) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: σ_r 为径向应力; σ_θ 为环向应力; u 为径向位移; r 为极径; t 为时间; ρ 为密度; E^* 、 ν^* 为弹性常量,该问题 $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$; E 、 ν 为弹性模量和泊松比。

将式(1)中第2、3式对时间微分,并记 $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ 。

则式(1)变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{E^*} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \nu^* \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} \right) \\ \frac{v}{r} &= \frac{1}{E^*} \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} - \nu^* \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这是一个关于 σ_r 、 σ_θ 和 v 的一阶双曲偏微分方程组,且这3个量都是 r 和 t 的函数。

2.2 波动方程在特征线下的表达式

特征线方程系为

$$\left. \begin{aligned} l_1: \frac{dr}{dt} &= c \\ l_2: \frac{dr}{dt} &= -c \\ l_3: \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: c 为柱形波波速,其无限域平面问题的表达式为

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1-\nu-2\nu^2)}} \quad (4)$$

这 3 类特征线的物理意义分别是: 沿着特征线 l_1 , σ_r 、 σ_θ 和 ν 连续, 但其微分在 $c+0$ 不连续; 沿着特征线 l_2 , 同样的, σ_r 、 σ_θ 和 ν 连续, 但其微分在 $c-0$ 不连续; 沿着特征线 l_3 , 则退化的动力表达。

沿着特征线的波动方程即成为了特征方程。在求解特征方程时, 特征线成为了补充条件, 特征线系规定了简化的波动方程求解的路径。沿着 3 类特征线的特征方程分别为式 (5) 第 1 式的上、下式和第 2 式。

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_r \mp \rho c d\nu &= (\sigma_\theta - \sigma_r \pm \rho v^* c\nu) \frac{dr}{r} \\ d\sigma_r &= \left(d\sigma_\theta - \frac{E^* \nu}{r} dt \right) \frac{1}{v^*} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

从式 (5) 第 2 式可以看出, 对于某一定点, 应力和位移的微分关系恒定。式 (5) 适用于 σ_r 、 σ_θ 和 ν 连续或者连续域内可能出现的导数不连续情况, 但不适用于特征线上出现的 σ_r 、 σ_θ 和 ν 不连续情况。所以式 (5) 仅适用于连续型加载问题。对于非连续型加载问题, 只需按式 (6) 计算特征线上的不连续响应即可。

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_r &= Kr^{-\frac{1}{2}} \\ d\sigma_\theta &= v^* Kr^{-\frac{1}{2}} \\ d\nu &= \mp \frac{1}{\rho c} Kr^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: K 为积分常量, 对于具体问题, 根据边界条件确定其取值; 式 (6) 第 3 式中“ $\mp$ ”分别用于特征线系 l_1 和 l_2 。特征线法的基本未知量为 σ_r 、 σ_θ 和 ν , 不能直接从方程中解出位移, 为此使 ν 对 t 积分, 即

$$s(t) = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t \quad (7)$$

式中: $s(t)$ 为 t 时刻的位移; v_i 为第 i 个 Δt 平均速度; $\Delta t = \frac{t}{n}$ 。

3 柱状弹性波波动方程的特征线解的数值实施

柱状弹性波的波动方程特征线法求解在 MATLAB 中数值实施包括以下 4 步:

第 1 步: 网格划分。

由于特征方程比起原始波动方程要容易求解, 因此, 求解过程都是沿着特征线系进行的。用 3 类特征线系将 r - t 平面划分为网格, 如图 1 所示。由于 $r < r_0$ 的范围没有受力体, 而 $r > r_0 + ct$ 的区域波前没有到达, 所以无需计算。因此, 只在特征线 $r = r_0$ 和 $r = r_0 + ct$ 之间划分网格。

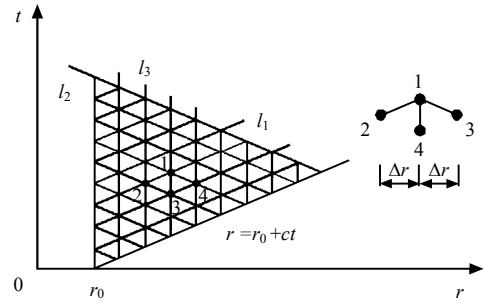


图 1 特征线 r - t 平面网格划分
Fig.1 Characteristic lines in r - t system

第 2 步: 坐标存储。

用 $[Q_r]$ 和 $[Q_t]$ 按顺序存储每一个网格节点的 r - t 坐标。存储顺序为从过 $(r_0, 0)$ 的那条 l_2 特征线 (图中未标出) 开始, 按顺序 l_2 依次向右上推移, 每一条 l_2 上的点为 $[Q_r]$ 和 $[Q_t]$ 的一行; 从过 $(r_0, 0)$ 的那条 l_1 即 $r = r_0 + ct$ 特征线开始, 按顺序依次向左上推移, 每一条 l_1 为 $[Q_r]$ 和 $[Q_t]$ 的一列。存储顺序也就确定了计算顺序, 按照 $[Q_r]$ 和 $[Q_t]$ 所存储元素从上到下, 从左到右的顺序计算。

第 3 步: 初边值条件。

实际中, 仅有径向荷载或径向速度输入, 作用位置为 $r = r_0$ 。输入又分为随时间的连续型输入和间断型输入。这两类输入的处理方法稍有差异。

第 4 步: 计算方法。

计算方法根据点的不同位置需要分 4 种情况计算, 且计算顺序应按如下顺序依次计算。

(1) 第 1 个计算点 $(r_0, 0)$ 的计算: 无论何种输入, $(r_0, 0)$ 的 3 个量总是很容易求取。对于间断型输入, 首先采用式 (6) 计算, 并能够确定 K ; 对于连续型输入, 该点的 3 个量都为 0。

(2) $r = r_0 + ct$ 特征线上点的计算: 对于间断型输入, 采用式 (6), 并按照步骤 (1) 中求得的 K 值能够完全确定所有未知量; 对于连续型输入, 该特征线上 3 个量保持不变。

(3) 网格内部点的计算: 无论是间断型输入还是连续型输入都采用式 (5) 计算。如图 1 所示, 假定 1 点是待确定点, 2、3、4 点是已确定点, 则 $2 \rightarrow 1$ 、

3→1 和 4→1 分别沿着一条特征线 l_1 、 l_3 和 l_2 这样也就确定了式 (5), 3 个方程中有 3 个未知量, 可以直接求出。

(4) $r=r_0$ 特征线上点的计算: 如果仍然按照步骤 (3) 中思路处理, 则会遇到一个问题。因为类似于步骤 (3) 中第 2 点是不存在的。再仔细审查一下边界条件, 发现这条线上总是有一个未知量已知, 所以只需剩余的两个方程即可确定未知量。

至此, 所有点的未知量都可以求出。从整个处理过程可以看出, 特征线法解引入的数值算法较少, 并且除规定了计算路径之外, 每一步的推导都是严格成立的。虽然是半解析半数值方法, 但比完全数值方法要精确很多。

4 柱状弹性波在无限域介质中衰减传播的实例

4.1 无限域中柱状弹性波实例的问题描述

采用平面应变无限域孔洞问题进行研究, 所采用材料参数见表 1, 内径 $r_0=1\text{ m}$ 。选取爆破双指数径向荷载计算, 爆破荷载双指数径向荷载 $p(t)=kp_0(e^{-at}-e^{-bt})$, 取 $k=1.435$, $a=1\ 279$, $b=12\ 792$, $p_0=100\text{ MPa}$, 双指数荷载与时间关系如图 2 所示。在此需要指出的是, 表 1 所给出的介质材料参数以及爆破荷载双指数函数的 k 、 a 、 b 及 p_0 只要满足弹性波动问题的条件, 即爆破荷载的介质的传播过程中, 不进入塑性即可。因此, 具体的取值并不失一般性。

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

参数	密度 $\rho/(\text{g/cm}^3)$	弹性模量 E/GPa	泊松比 ν
数值	7.9	210	0.3

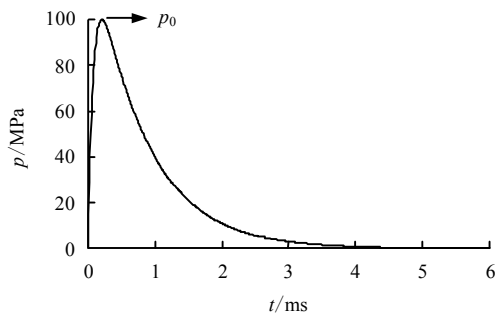


图 2 爆破双指数径向荷载

Fig.2 Radial compression wave expressed by the double exponential function

图 3 为无限域中圆形孔洞均布爆破双指数径向

荷载问题的示意图。

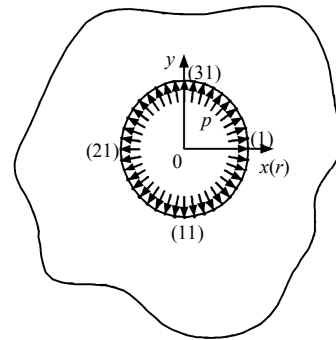


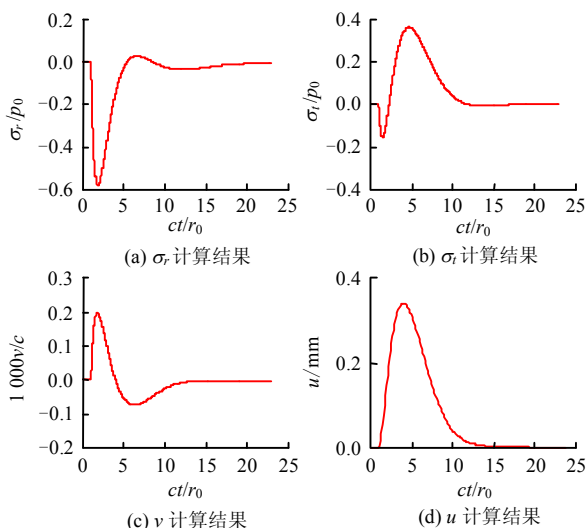
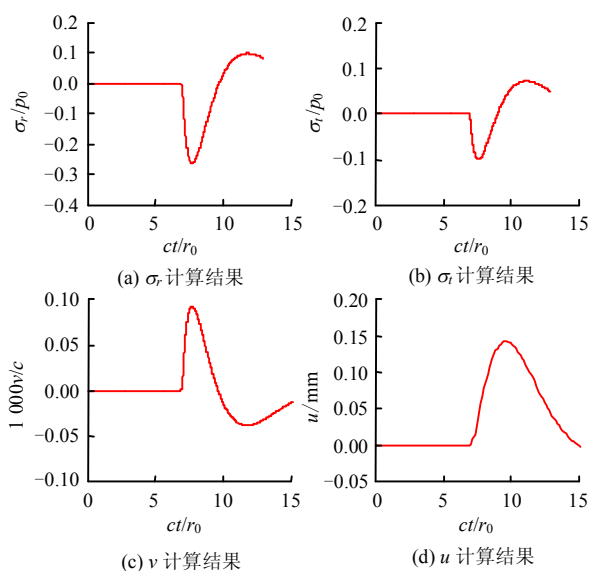
图 3 无限域孔洞弹性模型荷载分布
ig.3 Distribution of compression load at the boundary of cylindrical cavity in infinite medium

4.2 计算结果及讨论

取 $r=2\text{ m}$ 和 $r=8\text{ m}$ 处的径向应力、环向应力、位移和速度进行计算。其结果分别如图 4、5 所示。计算结果中所有应力、速度和时间进行了无量纲化处理。

特征线法是一种逼近理论解的高精度解, 理论上讲比包括有限元、有限差分以及边界元等数值分析解精度高。严格来讲, 特征线法解可以验证数值分析解, 而数值分析解不可以验证特征线法解, 但数值分析可以作为参考与特征线法解进行比对。本文中的无限域中柱状弹性波实例问题的时域边界元法解尚未公开在期刊论文中发表。有兴趣的读者可参阅文献[12], 查看无限域中柱状弹性波实例的问题特征线法解与时域边界元解的高精度一致性。为此, 本文也从得到的特征线法解的一些观察现象与工程中的波动问题进行对比, 从另一个侧面说明本文的特征线法解的合理性。

从图 4、5 可以看出, 图中所有时程曲线在初始阶段都有一段纵轴坐标值为 0 的水平线, 这是由于波前尚未到达计算点, 无论是应力、位移还是速度都理应为 0。比较图 4、5 中相对应的曲线, 可以看出: $r=8\text{ m}$ 时比 $r=2\text{ m}$ 时出现了更长的纵轴坐标值为 0 的水平段, 说明波前传到 $r=8\text{ m}$ 位置需要更长时间。图 4、5 中纵轴坐标值为 0 的水平段长度分别由波前传到 $r=2\text{ m}$ 以及 $r=8\text{ m}$ 位置所需要时间决定的 (图中纵坐标做了归一化处理)。根据理论公式 (4) 以及表 1 的参数计算的波速为 $5\ 982\text{ m/s}$, 则波前到达 $r=2\text{ m}$ 及 $r=8\text{ m}$ 位置的时间差应为 1.003 ms ; 而特征线法的波前到达 $r=2\text{ m}$ 及 $r=8\text{ m}$ 位置的时间差为 $1.000\ 7\text{ ms}$ 。可见就波前到达 $r=2\text{ m}$ 以及 $r=8\text{ m}$ 位置的时间差来说, 特征线法解的误差仅为 0.3% 。

图 4 $r=2\text{ m}$ 处计算结果Fig.4 Results at $r=2\text{ m}$ 图 5 $r=8\text{ m}$ 处计算结果Fig.5 Results at $r=8\text{ m}$

随着时间的推移, 分别观察图 4、5 中的时程曲线, 所有时程曲线都有第 1 个峰值。爆破双指数荷载作用下径向应力、环向应力、速度的变化较快, 但曲线斜率不是无穷大, 说明爆破双指数荷载在弹性介质中传播时应力和速度是连续的, 但其变化率不连续。

分别观察图 4、5 中的径向应力时程曲线可见, 在爆破双指数荷载传播过程中, 径向应力从 0 到峰值的过程类似于输入的爆破应力波。可以推断爆破应力波在传播过程中径向应力波的幅值有所减小, 但波形没有变化。分别观察图 4、5 中位移时程曲线可见, 位移波在传播过程中具有滞后性, 且位移产生峰值和径向应力几乎同时第 1 次恢复为 0。

分别观察图 4、5 中的环向应力时程曲线可见, 在奇异时刻, 环向应力突变为负值, 这是由于突加

径向荷载对孔洞挤压, 孔洞来不及发生径向位移而发生了较大的环向变形, 从而导致环向应力为负。

同时分别观察图 4、5 中径向应力、环向应力、速度及位移时程曲线可见, 当径向应力达到回返峰值时, 环向挤压扩散, 在径向应力作用下环向应力达到最大拉应力; 速度也达到负向最大值; 位移已经越过峰值, 进入下降阶段, 且此时出现拐点, 曲线凸性发生变化。观察图 4 中的径向应力、环向应力、速度及位移时程曲线可见, 由于爆破双指数荷载不随时间持续明显变化, 而且问题为无限域型, 波向外散射而没有回返, 当响应越过第 2 次峰值后, 波动性变得不明显, 最终恢复达到一个接近静力问题的平稳值。在此需要指出的是, 图 5 中相应的时程曲线并没有恢复到静力问题的平稳值, 原因是计算时间截取所致, 截取时间足够长, 时程曲线也全部恢复到静力问题的平稳值。

上述突变现象是由于波前奇异性引起的, 爆破双指数荷载属于连续加载情况, 计算点应力和速度的变化率不连续, 但其本身连续; 而位移随时间变化关系总是连续的。

5 结 论

(1) 应用统一弹性波的特征线法解, 求解了源自圆形孔洞的双指数爆破荷载在理想介质中的传播。对爆破荷载在理想弹性介质中传播过程中的径向及环向应力、速度及位移波的特征线法解的求解过程进行了详细的展示。

(2) 基于径向及环向应力、速度及位移波的特征线法结果的观察, 说明爆破荷载应力波在无限弹性介质中传播的特征线法解能够很好地反映相应的双曲型偏微分方程的解。

参 考 文 献

- [1] 张欣, 李术才. 爆破荷载作用下青岛胶州湾海底隧道覆盖岩层稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(11): 2348—2355.
ZHANG Xin, LI Shu-cai. Stability analysis of rock cover of Qingdao Kiaochow bay subway tunnel under explosive loads[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(11): 2348—2355.
- [2] 任允涛. 各向同性与各向异性介质波动问题边界元法及其工程应用[D]. 北京: 清华大学, 1995.
REN Yun-tao. Boundary element methods for wave propagation problems in isotropic or anisotropic media and its application in engineering[D]. Beijing: Tsinghua University, 1995.